Développement : Endomorphismes semi-simples

Algèbre & Géométrie

Référence : [GX] Gourdon X., *Les maths en tête - Algèbre*, **2ème édition**, ellipses, 2009, p224.
Pour le lemme admis : même référence, p194 (indiqué dans le développement dans le livre).
Pour les leçons :
141 : Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.
150 : Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.
151 : Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.

$\mathbb{K}$ est un corps. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n. Pour tout $u \in \mathcal{L}(E)$, on note Π_u son polynome minimal.
On admet le lemme suivant :

Lemme 1.

Soient $f \in \mathcal{L}(E)$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme annulateur de f. On écrit $P = \beta \prod_{k=1}^{s} P_k^{\alpha_s}$ la décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ de P.
Pour tout $i \in [\![1;s]\!]$, on note $N_i = \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(f))$.
Alors, $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$, et pour tout $i \in [\![1;s]\!]$, la projection sur N_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} N_j$ est un polynôme en f.

Preuve : On admet ce lemme, mais au cas où une question serait posée à l'oral, en voici une preuve.
D'après le lemme des noyaux, on a directement $E = \bigoplus_{i=1}^{s} N_i$.

Pour $i \in [\![1;s]\!]$, on pose $Q_i = \prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} P_j^{\alpha_j}$. Les Q_i sont premiers entre eux (dans leur ensemble). D'après l'égalité de Bézout, il existe $U_1, \ldots, U_s \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\sum_{i=1}^{s} U_i Q_i = 1$. En évaluant en f :

$$\mathrm{Id}_E = \sum_{i=1}^{s} U_i(f) \circ Q_i(f).$$

Soit $i \in [\![1;s]\!]$. On note ensuite $F_i = U_i Q_i$ et $p_i = F_i(f)$. Alors, $\mathrm{Id}_E = \sum_{j=1}^{s} p_j$. En composant avec p_i à gauche, $p_i = \sum_{j=1}^{s} p_i \circ p_j$
Par ailleurs, si $j \neq i$, $P | Q_i Q_j$, donc $p_i \circ p_j = Q_i Q_j(f) \circ U_i U_j(f) = 0$. Donc $p_i = p_i^2$, ce qui prouve que p_i est un projecteur.
$\longrightarrow$ Montrons désormais que $\mathrm{Im}(p_i) = N_i$. Soit $y \in \mathrm{Im}(p_i)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = p_i(x)$. On a :

$$\begin{aligned} P_i^{\alpha_i}(f)(y) &= P_i^{\alpha_i}(f) \circ F_i(f)(x) \\ &= P_i^{\alpha_i}(f) \circ U_i(f) \circ Q_i(f)(x) \\ &= U_i(f) \circ P(f)(x) \\ &= 0, \end{aligned}$$

car P est un polynôme annulateur de f. Donc $\mathrm{Im}(p_i) \subset \mathrm{Ker}(P_i^{\alpha_i}(f)) = N_i$.
Réciproquement, soit $x \in N_i$. Comme $\mathrm{Id}_E = \sum_{j=1}^{s} p_j$, $x = \sum_{j=1}^{s} p_j(x)$.
Or, si $j \neq i$, comme $P_i^{\alpha_i} | Q_j$ et $x \in N_i$, $p_j(x) = U_j(f) \circ Q_j(f)(x) = 0$, d'où $x = p_i(x)$, et $N_i \subset \mathrm{Im}(p_i)$.
$\longrightarrow$ Montrons enfin que $\mathrm{Ker}(p_i) = \bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} N_j$. Si $x \in \mathrm{Ker}(p_i)$, comme $\mathrm{Id}_E = \sum_{j=1}^{s} p_j$, $x = \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} p_j(x)$, et donc par le point précédent, $x \in \bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{s} N_j$.

Réciproquement, soit $j \in [\![1;s]\!]\backslash\{i\}$. Pour tout $x \in N_j$, on a $p_i(x) = U_i(f) \circ Q_i(f)(x) = 0$ (même argument qu'au point précédent), d'où l'inclusion réciproque.
D'où le résultat (puisque les p_i sont des polynômes en f). □

Définition 2.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On dit que f est *semi-simple* si pour tout sous-espace vectoriel F de E stable par f, il existe un supplémentaire G de F stable par f.

Le but de ce développement est de démontrer qu'un endomorphisme est semi-simple si, et seulement si son polynôme minimal est sans facteur carré. On pourra admettre le lemme suivant, ou bien le démontrer si le temps le permet.

Lemme 3.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On écrit $\Pi_f = \prod_{k=1}^{r} P_k^{\alpha_k}$ avec les $P_k \in \mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux et irréductibles. Pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, on pose $F_i = \operatorname{Ker}(P_i^{\alpha_i}(f))$.

Alors, pour tout sous-espace vectoriel F de E stable par f, $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F \cap F_i$.

<u>Preuve :</u> Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f.
Comme les P_k (donc les $P_k^{\alpha_k}$) sont deux à deux premiers entre eux, le lemme des noyaux fournit :

$$E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i.$$

Soit $i \in [\![1;r]\!]$. On note p_i la projection sur F_i parallèlement à $\bigoplus_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{r} F_j$.

p_i est un polynôme en f (admis du coup).
Ainsi, comme F est stable par f, F est stable par p_i, i.e. $p_i(F) \subset F$. On a aussi $p_i(F) \subset p_i(E) = F_i$.

Par conséquent, $p_i(F) \subset F \cap F_i$, et comme $\mathrm{Id}_E = \sum_{i=1}^{r} p_i$, on a :

$$F \subset \sum_{i=1}^{r} p_i(F) = \bigoplus_{i=1}^{r} p_i(F) \subset \bigoplus_{i=1}^{r} F \cap F_i.$$

L'inclusion réciproque est claire. □

Lemme 4.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si Π_f est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, alors f est semi-simple.

<u>Preuve :</u> Supposons que Π_f est irréductible dans $\mathbb{K}[X]$.
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f.
Si $F = E$, $\{0\}$ est un supplémentaire de F dans E stable par f.
Sinon, il existe $x_1 \in E\backslash F$. On note alors $E_{x_1} := \{P(f)(x_1) \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$.
E_{x_1} est un sous-espace vectoriel de de E stable par f. Montrons alors que $E_{x_1} \cap F = \{0\}$.
$I_{x_1} := \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(f)(x_1) = 0\}$ est un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$ (car $\Pi_f \in I_{x_1}$), donc il est engendré par un polynôme unitaire Π_{x_1} tel que $I_{x_1} = (\Pi_{x_1})$, puisque $\mathbb{K}$ est un corps.
Comme $\Pi_f \in I_{x_1}$, $\Pi_{x_1} | \Pi_f$, mais Π_f est irréductible par hypothèse, et unitaire, donc $\Pi_{x_1} = \Pi_f$. Donc Π_{x_1} est irréductible.
Soit maintenant $y \in E_{x_1} \cap F$. Comme $y \in E_{x_1}$, il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $y = P(f)(x_1)$.
Raisonnons par l'absurde en supposant que $y \neq 0$. Alors, $P \notin I_{x_1} = (\Pi_{x_1})$, donc Π_{x_1} ne divise pas P. Comme Π_{x_1} est irréductible, $P \wedge \Pi_{x_1} = 1$, donc d'après le théorème de Bézout, il existe $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $UP + V\Pi_{x_1} = 1$. En évaluant en f puis en x_1, on obtient :

$$\begin{aligned} x_1 &= U(f) \circ P(f)(x_1) + V(f) \circ \Pi_{x_1}(x_1) \\ &= U(f)(y). \end{aligned}$$

Or, $y \in F$ et F est stable par f, donc $f(y) \in F$, et donc $x_1 \in F$, ce qui n'est pas possible par définition de x_1.
Donc $y = 0$, ce qui prouve que $E_{x_1} \cap F = \{0\}$.
Ainsi, E_{x_1} et F sont en somme directe et stables par f.
$\longrightarrow$ Si $F \oplus E_{x_1} = E$, c'est terminé.

$\longrightarrow$ Sinon, on choisit $x_2 \in E \backslash (F \oplus E_{x_1})$, et on itère le processus en remplaçant F par $F \oplus E_{x_1}$. Au bout d'un nombre fini d'itérations (puisque E est de dimension finie), on aura trouvé $x_1, \ldots, x_k \in E$ tels que $E = F \oplus \bigoplus_{i=1}^{k} E_{x_i}$ et pour tout $i \in [\![1;k]\!]$, E_{x_i} est stable par f, donc $\bigoplus_{i=1}^{k} E_{x_i}$ aussi, ce qui achève la preuve. $\square$

Théorème 5.

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Alors, f est semi-simple si, et seulement si Π_f est sans facteur carré.

<u>Preuve :</u> $\Longrightarrow$) Supposons f semi-simple. On écrit $\Pi_f = \prod_{k=1}^{r} P_k^{\alpha_k}$ la décomposition de Π_f en produit de facteurs irréductibles unitaires de $\mathbb{K}[X]$. Montrons que pour tout $k \in [\![1;r]\!]$, $\alpha_k = 1$.
Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe $i \in [\![1;r]\!]$ tel que $\alpha_i \geqslant 2$.
En notant $M = P_i$, on écrit alors $\Pi_f = M^2 N$ avec $N \in \mathbb{K}[X]$.
Soit $F = \mathrm{Ker}(M(f))$. F est stable par f, qui est semi-simple, donc il existe un supplémentaire S de F dans E stable par f.
$\longrightarrow$ Montrons que $MN(f)$ est nul sur S. Soit $x \in S$.
Alors, comme S est stable par f, $MN(f)(x) \in S$.
De plus, $M(f)(MN(f)(x)) = \Pi_f(f)(x) = 0$, donc $MN(f)(x) \in F$.
Ainsi, $MN(f)(x) \in F \cap S = \{0\}$, et donc $MN(f)(x) = 0$. Donc pour tout $x \in S$, $MN(f)(x) = 0$.
$\longrightarrow$ L'endomorphisme $MN(f)$ est aussi nul sur F. En effet, si $y \in F$, $MN(f)(y) = N(M(f))(y) = 0$, puisque $F = \mathrm{Ker}(M(f))$.
Comme F et S sont supplémentaires dans E, $MN(f) = 0$ sur E tout entier. Donc MN est un polynôme annulateur de f de degré strictement inférieur à celui de Π_f, ce qui est absurde.
D'où le fait que Π_f soit sans facteur carré.

$\Longleftarrow$) Supposons que Π_f soit sans facteur carré. On écrit $\Pi_f = \prod_{k=1}^{r} P_k$, avec les P_k irréductibles deux à deux distincts et unitaires. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par f.

Pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, posons $F_i = \mathrm{Ker}(P_i(f))$. D'après le lemme des noyaux, on a $E = \bigoplus_{i=1}^{r} F_i$, et d'après le lemme , $F = \bigoplus_{i=1}^{r} F \cap F_i$.
Pour tout $i \in [\![1;r]\!]$, F_i est stable par f. Soit $f_i = f_{|F_i}$. Comme $P_i(f_i) = 0$ et P_i est unitaire et irréductible dans $\mathbb{K}[X]$, $P_i = \Pi_{f_i}$. D'après le lemme , f_i est semi-simple.
Comme $F \cap F_i$ est stable par f, il existe donc un sous-espace vectoriel S_i de F_i stable par f et tel que $F \cap F_i$ et S_i sont supplémentaires dans F_i.

Posons $S = \bigoplus_{i=1}^{r} S_i$. On a :

$$
\begin{aligned}
E &= \bigoplus_{i=1}^{r} F_i \\
&= \bigoplus_{i=1}^{r} ((F_i \cap F) \oplus S_i) \\
&= \left(\bigoplus_{i=1}^{r} F_i \cap F \right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{r} S_i \right) \\
&= F \oplus S,
\end{aligned}
$$

et S est stable par f. Cela achève la preuve, et donc le développement. $\square$

Remarque 6.

Si $\mathbb{K}$ est algébriquement clos, les polynômes irréductibles de $\mathbb{K}[X]$ sont ceux de degré 1, donc $f \in \mathcal{L}(E)$ est semi-simple si, et seulement si Π_f est scindé à racines simples. Donc f est semi-simple si, et seulement si f est diagonalisable.

Questions possibles à l'oral :
Ce n'est pas une liste exhaustive, mais j'ai déjà vu ces questions être posées à l'oral.
Q1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Peut-il y avoir une condition similaire avec χ_u ?
<u>Réponse :</u> Si χ_u est sans facteur carré, Π_u divise χ_u donc Π_u est aussi sans facteur carré, et donc u est semi-simple.

Par contre, la réciproque est fausse : si $u = \mathrm{Id}_E$, on a $\chi_u = (X-1)^2$ qui n'est pas sans facteur carré, alors qu'il est semi-simple (puisque $\Pi_u = X - 1$ est sans facteur carré).

Q2. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. A-t-on une relation entre "être semi-simple sur $\mathbb{C}$" et "être semi-simple sur $\mathbb{R}$" ?

Réponse : C'est la même chose : être sans facteur carré sur $\mathbb{C}$ est équivalent à l'être sur $\mathbb{R}$.